

Der Satz des Bernoulli

Wohl jeder hat schon selbst erlebt, dass bei starkem Sturm ein Regenschirm „umklappen“ kann, und zwar nach oben. Auf den ersten Blick erscheint das unlogisch: Eigentlich müsste der Wind die Schirmfläche doch herunterdrücken. Warum also klappt bei Sturm der Schirm nach oben? Betrachtet man einmal die Strömung auf der gewölbten Oberseite, so kann man sich vorstellen, dass die Luft hier durch einen engeren Querschnitt strömen muss als vor oder hinter dem Schirm.

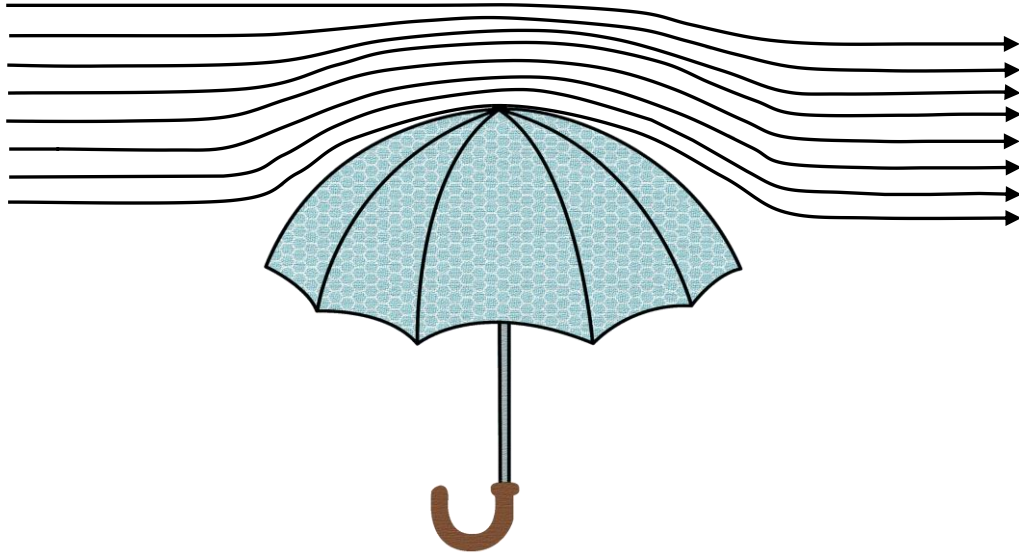


Abb. 1: Umströmung eines Regenschirms bei Sturm (schematisch)
 Quelle: eigene Darstellung/ Pixabay

Ganz ähnlich muss sich eine strömende Flüssigkeit in einem Rohr verhalten, das eine Querschnittsverengung besitzt.

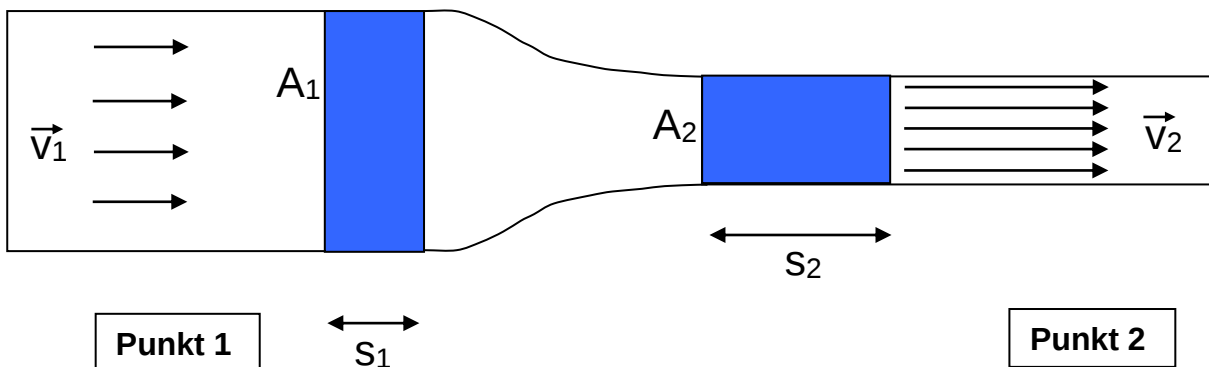


Abb. 2: Rohr mit Querschnittsverengung
 Quelle: eigene Darstellung

Man kann nun davon ausgehen, dass die Flüssigkeit inkompressibel ist, d. h. eine konstante Dichte hat. Dann ist es offensichtlich, dass in gleichen Zeitintervallen gleiche Volumina durch jeden Rohrquerschnitt strömen müssen.

$$Q_1 = Q_2$$

$$\frac{V_1}{t} = \frac{V_2}{t}$$

$$\frac{A_1 \cdot s_1}{t} = \frac{A_2 \cdot s_2}{t}$$

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung})$$

Diese so genannte Kontinuitätsgleichung besagt, dass die Geschwindigkeit in einem engen Strömungsquerschnitt höher sein wird als in einem weiten (durchfahren Sie also in Zukunft Autobahnbaustellen, die einen Fahrstreifen sperren, einfach doppelt so schnell, dann bildet sich kein Stau).

An der Verengung muss die Flüssigkeit also beschleunigt werden. Daraus kann man schließen, dass im weiten Querschnitt ein höherer Druck herrschen muss als im engen. Verschiebt man beispielsweise ein bestimmtes Flüssigkeitsvolumen im Bereich des weiten Querschnitts, so muss dazu folgende Arbeit gegen den dort herrschenden Druck p_{Stat} geleistet werden:

$$W_1 = F_1 \cdot s_1 = p_{\text{Stat } 1} \cdot A_1 \cdot s_1 = p_{\text{Stat } 1} \cdot V$$

Ebenso im engen Querschnitt:

$$W_2 = F_2 \cdot s_2 = p_{\text{Stat } 2} \cdot A_2 \cdot s_2 = p_{\text{Stat } 2} \cdot V$$

Die Differenz zwischen diesen beiden so genannten Druckenergien

$$W = W_1 - W_2 = (p_{\text{Stat } 1} - p_{\text{Stat } 2}) \cdot V$$

ist gerade die kinetische Energie, die zum Beschleunigen der Flüssigkeit an der Verengung genutzt wird.

Dies lässt sich auch als Differenz der kinetischen Energie, die das Flüssigkeitsvolumen jeweils vor bzw. hinter der Verengung besitzt, ausdrücken:

$$W = W_{\text{Kin1}} - W_{\text{Kin2}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V \cdot (v_2^2 - v_1^2)$$

Daher lassen sich die beiden Ausdrücke gleichsetzen:

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V \cdot (v_2^2 - v_1^2) = (p_{\text{Stat } 1} - p_{\text{Stat } 2}) \cdot V$$

$$p_{\text{Stat } 1} + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_{\text{Stat } 2} + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

oder:

$$p_{\text{Stat}} + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const.}$$

p_{stat} ist der statische Druck. Er entsteht aufgrund der Teilchenbewegung und wirkt gleichmäßig in alle Richtungen.

$\frac{1}{2}\rho v^2$ ist der dynamische Druck oder Staudruck. Wie der Name schon sagt, wirkt er nur in Strömungsrichtung.

Obige Gleichung besagt also, dass die Summe aus dynamischem und statischem Druck, der so genannte Gesamtdruck, immer konstant ist.

Was heißt das nun für unseren Regenschirm? Über seiner gewölbten Oberseite ist der Strömungsquerschnitt geringer (siehe Abb. 1). Die Geschwindigkeit muss also nach der Kontinuitätsgleichung höher sein als vor oder hinter dem Schirm. Es wird demnach dort ein höherer dynamischer Druck herrschen. Da nun der Gesamtdruck stets konstant ist, muss der statische Druck hier relativ niedrig sein.

Entscheidend ist nun, dass der Staudruck nur in Strömungsrichtung wirkt. An der engsten Stelle, wo er sein Maximum erreicht, übt er überhaupt keine Kraft auf die Schirmfläche aus. Während der in alle Richtungen, also auch auf die Schirmfläche, wirkende statische Kraft hier geringer ist als der unter dem Schirm herrschende Normaldruck. Dieser wiederum drückt nun den Schirm nach oben.

Der umklappende Schirm ist aber nur eine von vielen auf den ersten Blick unerklärlichen und doch alltäglichen Erscheinungen. So werden z. B. die Vorhänge vor einem offenen Zugfenster bei fahrendem Zug immer nach außen geweht. Bei starkem Sturm werden Hausdächer regelrecht nach oben gehoben. Der Bernoulli-Effekt ist auch verantwortlich dafür, dass Vögel und Flugzeuge vom Segelflieger bis hin zum Jumbo überhaupt fliegen können. Sieht man sich die Tragfläche eines Flugzeugs im Schnitt an, so erkennt man, dass das Flügelprofil unten mehr oder weniger gerade, auf der Oberseite aber gewölbt ist. Oben wird die Luft also schneller strömen, der dynamische Druck wird größer und der statische geringer sein als an der Unterseite. Das Flugzeug wird also gewissermaßen nach oben gesogen. Propeller und Hubschrauberrotoren sind ähnlich profiliert und arbeiten auf gleiche Weise.

In Wasser gibt es ganz ähnliche Phänomene: Es kommt z. B. vor, dass sich Schiffe, die parallel fahren, aneinander ansaugen. An Kanälen werden Schäden dadurch verursacht, dass die Schiffe sich aufgrund des geringen Strömungsquerschnitts zwischen Schiffsboden und Kanalgrund an letzteren ansaugen.

Berücksichtigt man jetzt noch mögliche Höhenunterschiede zwischen Punkt 1 und Punkt 2, also keine horizontal verlaufende Strömung wie in Abb.2, erhält man die komplette Bernoulli-Gleichung:

$$\rho g h_1 + p_{\text{stat } 1} + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \rho g h_2 + p_{\text{stat } 2} + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

oder

$$\rho g h + p_{\text{stat}} + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const.}$$

Die Summe aus Schweredruck, statischem Druck und dynamischen Druck ist immer konstant.

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1: Umströmung eines Regenschirms bei Sturm (schematisch)	1
Abb. 2: Rohr mit Querschnittsverengung	1